



Л.А. Бакст

# ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

## ПРОГРАММА КУРСА. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

Для бакалавров факультета экономики и управления  
по направлениям подготовки  
«Экономика», «Менеджмент»  
(математический цикл дисциплин)

Москва  
Издательство МИЭП  
2013

Автор-составитель: канд. техн. наук, проф. Л.А. Бакст

**Основы финансовой математики.** Программа курса. Практические задания / Автор-составитель: Л.А. Бакст. – М.: МИЭП, 2013. – 16 с.

Курс разработан в соответствии с ФГОС ВПО и применяемой в МИЭП технологией проблемно-поискового образования. Для бакалавров факультета экономики и управления по направлениям подготовки «Экономика», «Менеджмент». Математический цикл дисциплин.

© Международный институт экономики и права, 2013

Программа курса включает тематику одного из важных и практически крайне значимых направлений прикладных вычислений, получившего название «финансовая математика».

В рамках этой дисциплины изучается математический аппарат решения финансовых задач современной экономики в широком спектре условий, сложности, специфики и природы экономических процессов. Полученные знания базируются на достижениях современной науки и позволяют квалифицированно решать конкретные финансово-экономические вопросы, возникающие в практической деятельности.

Содержание курса «Основы финансовой математики» опирается на инструментарий других математических дисциплин, таких как: «Математический анализ», «Линейная алгебра», и др. Однако, его основным фундаментом служит тесная связь с соответствующими разделами финансовых, экономических и юридических дисциплин, изучаемых в ВУЗе, что требует от обучающегося глубоких и прочных знаний их положений, используемой терминологии, постоянного обращения к соответствующим источникам.

Отметим, что практика финансовых расчетов широко использует процентные отношения. Хотя математический аппарат, в этом случае, может показаться простым, однако, конкретное его приложение для разнообразных по форме и содержанию финансовых приложений часто далеко не очевидно, и вызывает определенные сложности. С целью приобретения необходимых навыков процентных вычислений, в состав практикума введен соответствующий раздел, фактически предваряющий задания основных разделов курса. Обучающимся настоятельно рекомендуется тщательно проработать предлагаемые упражнения, прежде чем приступать к заданиям последующих разделов.

Курс соответствует образовательной программе для специальностей экономического цикла, имеет ярко выраженный *прикладной* характер и отвечает требованиям государственного образовательного стандарта.

В результате изучения курса обучающийся *должен*:

- **знать** основные положения теории процентов, методы и характеристики оценки финансовых потоков, доходности ценных бумаг, портфельных инвестиций и вложений, доходности облигаций, и др.

- **уметь** применять математический инструментарий финансового анализа для целей теоретического и экспериментального исследования при решении финансово-экономических задач;

- **владеть** навыками применения современных компьютерных технологий и программ для решения финансово-экономических задач.

---

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

---

Основной целью практических заданий (ПЗ) по курсу математики для экономистов является формирование способности обучающихся к самостоятельному мышлению и умению применять изученные теоретические разделы к количественному анализу конкретных задач. ПЗ являются составной частью общего учебно-методического комплекса (УМК) по математике и по содержанию полностью соответствуют *программе* курса.

Особое внимание при выполнении заданий следует уделить отработке прикладных расчетных навыков, пониманию алгоритмов раскрытия математических задач, умению обосновывать и объяснять полученные решения.

Раздел включает в себя *контрольные задания, которые следует выполнить и сдать преподавателю.*

Задание можно выполнять как классическим способом – «вручную», так и, при наличии компьютера, используя пакет *MATHCAD Professional*, что существенно сократит время.

При выполнении контрольных заданий по каждой теме обучающийся подставляет вместо резервированных буквенных параметров индивидуальные анкетные характеристики:

$p_1$  - число букв в полном имени обучающегося;

$p_2$  - число букв в полном имени отца обучающегося (но не в отчестве);

$p_3$  - число букв в фамилии обучающегося.

При отсутствии каких-либо анкетных характеристик соответствующее значение параметра следует принять равным 1.

Задания по каждой теме заимствованы из учебных пособий, рекомендованной литературы, а также справочников и аналогичных изданий, имеющих в библиотеке института.

## Основы финансовой математики

### Тема 1. Простые и сложные проценты

Введение. Простые проценты. Сложные проценты. Кратное начисление процентов. Непрерывное начисление процентов. Эквивалентность процентных ставок в схеме сложных процентов. Сравнение наращивания по простой и сложной ставкам процента.

### Тема 2. Дисконтирование и удержание процентов

Сравнение дисконтирования по сложной и простой учетной ставке. Мультиплицирующие и дисконтные множители. Правило 70. Влияние инфляции на ставку процента. Формула Фишера. Синергетический эффект. Эффективная процентная ставка. Учет инфляции и налогов. Внутренняя норма доходности. Операции с валютой.

### Тема 3. Финансовые потоки

Финансовые потоки (потоки платежей). Текущая, современная, будущая приведенная и конечная величины финансового потока. Средний срок финансового потока. Непрерывное начисление платежей.

### Тема 4. Регулярные потоки платежей. Рента

Обыкновенные ренты. Коэффициенты приведения и наращивания рент. Рента постнумерато и пренумерато. Расчет параметров ренты. Вечные, срочные и непрерывные ренты. Связь между приведенной и наращенной величинами ренты. Ренты пренумерато. Ренты с платежами в середине периодов. Немедленные и отложенные ренты. Арифметические и геометрические ренты. Сравнение финансовых потоков и рент. Конверсия рент.

### Тема 5. Доходность финансовых операций

Доход и доходность финансовых операций. Доходность за несколько периодов. Синергетический эффект. Коррелированность финансовых операций.

### Тема 6. Риски финансовых операций

Виды финансовых рисков и их количественная оценка. Методы уменьшения финансовых рисков: диверсификация и хеджирование. Матрицы последствий и рисков. Правило Вальда. Правило Сэвиджа. Правило Гурвица. Финансовые операции и принятие решений в условиях неопределенности. Правило максимизации среднего дохода и правило минимизации

среднего риска. Правильная (по Парето) финансовая операция. Правило Лапласа равновозможности.

### **Тема 7. Портфельный анализ**

Доходность ценной бумаги и портфеля. Портфель заданной эффективности. Портфель заданного риска. Портфели Марковица. Портфель минимального риска. Портфель максимальной эффективности. Портфели Тобина.

### **Тема 8. Оптимальные неотрицательные портфели**

Теорема Куна-Таккера. Доходность неотрицательного портфеля. Портфель максимального риска с неотрицательными компонентами. Портфель максимальной эффективности с неотрицательными компонентами. Портфель минимального риска с неотрицательными компонентами. Диверсификация портфеля.

### **Тема 9. Облигации**

Облигации, основные понятия. Текущая стоимость облигации. Текущая доходность и доходность к погашению. Зависимость доходности к погашению облигации от параметров. Дополнительные характеристики облигации: средний срок поступления дохода, дюрация облигации. Выпуклость облигации.

### **Тема 10. Портфель облигаций**

Портфель облигаций. Иммунизация портфеля облигаций. Доходность портфеля облигаций. Средний срок поступления дохода портфеля. Дюрация портфеля облигаций и его выпуклость.

### Основная литература

1. *Брусов П.Н.* Финансовая математика: Учеб. пособие для бакалавров / *П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина* (Гриф УМО) – М.: КноРус, 2010.
2. *Брусов П.Н.* Задачи по финансовой математике: Учеб. пособие для бакалавров / *П.Н. Брусов, П.П. Брусов, Н.П. Орехова, С.В. Скородулина* (Гриф УМО) – М.: КноРус, 2012.
3. *Блау С.Л., Григорьев С.Г.* Финансовая математика. – М.: Академия, 2011.
4. *Блау С.Л.* Финансовая математика: Практикум – М.: Академия, 2011.
5. *Касимов Ю.Ф.* Финансовая математика: Учебник. – М.: ЮРАЙТ, 2012. (ЭБС)

### Дополнительная литература

6. *Малыхин В.И.* Финансовая математика: Учебник (Гриф УМО). – М.: Юнити-Дана, 2012. (ЭБС)
7. *Чусавитина Г.Н.* Основы финансовой математики – М.: Флинта, 2010.
8. *Копнова Е.Д.* Основы финансовой математики. – М.: Синергия, 2012.

---

## ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

---

### Задания по теме 1. Простые и сложные проценты

**1.1.** Рассчитайте сумму накопленного долга и процента, если ссуда 100000 руб. выдана на два года под простые  $(p_1+p_2)\%$  годовых. Во сколько раз увеличится наращенная сумма при повышении ставки на 1%?

**1.2.** Вклад в размере  $p_1 \cdot 1000$  руб. положен в банк  $2 \cdot p_2$  марта под  $2 \cdot p_3$  процентов годовых по схеме сложных процентов. Какую сумму получит вкладчик 22 октября?

**1.3.** Клиент открыл вклад в банке на 1,5 года 02.12.2008, положив на счет 13000\$. Условия вклада не предусматривали возможности его пролонгации. По окончании срока на вклад с процентами начислялась ставка по вкладам «до востребования» (0,1%). Оцените потери клиента банка, если ставка была  $p_1\%$  годовых, а вклад востребован 02.12.2010.

**1.4.** В банк положен депозит в размере 1000 руб. под  $2 \cdot p_2$  процентов годовых по схеме сложных процентов. Определите величину депозита через три года при начислении депозита 1, 4, 6 и 12 раз в году и в случае непрерывного начисления процентов.

**1.5.** Налог на добавленную стоимость (НДС) равняется 18% цены товара. Определите цену товара, если товар с учетом НДС стоит  $100 \cdot (p_1+p_2)$ .

 Литература: 1-3, 5-8.

### Задания по теме 2. Дисконтирование и удержание процентов

**2.1.** Какую сумму нужно положить на депозит под  $p_1$  процентов годовых, чтобы через пять лет получить сумму 200000 руб.?

**2.2.** Вексель стоимостью  $p_2 \cdot 100000$  руб. учитывается за четыре года до погашения по сложной учетной ставке 15 процентов годовых. Требуется найти сумму, получаемую векселедержателем, и величину дисконта.

**2.3.** За сколько времени удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке  $2 \cdot p_1$  процентов годовых?

**2.4.** За сколько лет удвоится капитал в схеме сложных процентов при ставке  $(p_1+p_2)\%$  годовых?




**2.5.** За сколько лет удвоится капитал в схеме простых процентов при ставке  $(p_1+p_2)\%$  годовых?

**2.6.** За сколько лет при ставке  $(p_1+p_2)\%$  годовых вклад вырастет в  $0,5 \cdot p_1$  раз при использовании схемы простых процентов?

**2.7.** За сколько лет при ставке  $(p_1+p_2)\%$  годовых вклад вырастет в  $0,5 \cdot p_1$  раз при использовании схемы сложных процентов?

**2.8.** Какую ставку должен установить банк, чтобы при инфляции  $p_1\%$  годовых он мог бы иметь  $10\%$  доходность?

 Литература: 1-3, 5-8.

### **Задания по теме 3. Финансовые потоки**

**3.1.** Определите средний срок потока

$$CF = \{(0; 100), (1; 200), (2; 80p_1), (3; 100)\}$$


**3.2.** Пусть  $CF = \{(1; -1300), (2; 1500), (3; 2500)\}$  – поток платежей. Рассчитайте приведенную стоимость и наращенную величину потока при ставке  $(p_1+p_2)\%$  по схеме сложных процентов.

**3.3.** Приведите поток

$$CF = \{(1; -1300), (2; 1500), (3; 2500)\}$$

к моменту времени  $t=3$  при ставке  $(p_1+p_2)\%$ .

**3.4.** Определите коэффициент приведения за три соседних периода с продолжительностью 1, 2 и 3 соответственно при ставке  $(p_1+p_2)\%$ .

 Литература: 1-3, 5-8.

### **Задания по теме 4. Регулярные потоки платежей. Рента**

**4.1.** Определите размер вклада, который обеспечивает ежегодное (в конце года) получение дохода величины 1700 в течение 19 лет, если процентная ставка равна  $(p_1+p_2)\%$ .

**4.2.** Формируется фонд на основе ежегодных отчислений в сумме 8000 у.е. с начислением на них сложных процентов по ставке  $(p_2+p_3)\%$ . Определите величину фонда через 10 лет.

4.3. Определите срок ренты постнумерандо, если известны значения наращенной суммы -  $S$ , размер отдельного платежа –  $R$  и процентная ставка  $i$  :


$$S = 2000; R = 100; i = (p_1 + p_2)\% .$$

4.4. Рассчитайте размер вклада, обеспечивающего получение в конце каждого года 2000 руб. бесконечно долго при сложной ставке  $(p_1 + p_2)\%$  годовых.

4.5. Для бессрочной ренты определите, что больше увеличит предельную стоимость этой ренты: увеличение рентного платежа на  $p_1\%$  или уменьшение процентной ставки на  $p_1\%$ .

4.6. Во сколько раз увеличится приведенная величина ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна  $(p_1 + p_2)\%$ .

4.7. Во сколько раз увеличится приведенная величина квартальной ренты постнумерандо, если платежи платить в начале периода? Ставка равна  $(p_2 + p_3)\%$ .


 Литература: 1-3, 5-8.

### **Задания по теме 5. Доходность финансовых операций**

5.1. Пусть доходности за два последовательных периода времени  $t_1$  и  $t_2$  равны  $2p_2\%$  и  $3p_3\%$  , соответственно. Рассчитайте доходность  $\mu$  за период  $t = t_1 + t_2$  .

5.2. Доходность актива за год  $\mu$  равна  $3p_3\%$ . Рассчитайте доходность актива за квартал  $\mu_1$  при условии ее постоянства.

5.3. Пусть доходность актива за месяц  $\mu_1$  равна  $p_1\%$ . Рассчитайте доходность актива за год -  $\mu$  при условии постоянства месячной доходности в течение года.

 Литература: 1-3, 5-8.

### **Задания по теме 6. Риски финансовых операций**

6.1. Для заданной матрицы последствий –  $Q$ :


$$Q = \begin{pmatrix} 3 & p_1 & 5 & 6 \\ p_3 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & p_2 & 1 \end{pmatrix}$$

Определите матрицу рисков -  $R$ .

**6.2.** Используя данные примера 6.1, укажите рекомендуемое решение, опираясь на правило Вальда (правило крайнего пессимизма).

**6.3.** Используя данные примера 6.1, укажите рекомендуемое решение, опираясь на правило Сэвиджа (правило минимального риска).

**6.4.** Используя данные примера 6.1, укажите рекомендуемое решение, опираясь на правило Гурвица.

 Литература: 1-3, 5-8.

### Задания по теме 7 и 8. Портфельный анализ

**7.1.** Портфель состоит из пяти активов, ценовые доли которых образуют геометрическую прогрессию, причем ценовая доля второго актива равна  $0,1p_1$ . Рассчитайте стоимость портфеля.


**7.2.** Портфель состоит из трех видов акций, данные о которых приведены в таблице:

	А	В	С
Количество	100	150	250
Начальная цена	80	$10p_1$	300
Конечная цена	90	$10p_2$	340

Определите доходность портфеля.

**7.3.** Одна из двух ценных бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры  $(0,4; 0,7)$ , доходность безрисковой бумаги равна  $0,31$ . Рассчитайте стоимость портфеля, если его доходность равна  $0,1 \cdot p_2$

**7.4.** Одна из двух ценных бумаг портфеля является безрисковой. Рисковая бумага имеет параметры  $(0,3; 0,5)$ , доходность безрисковой бумаги равна  $0,2$ . Рассчитайте стоимость портфеля и его доходность, если его риск равен  $0,1 \cdot p_3$

 Литература: 1-3, 5-8.

## Задания по теме 9. Облигации

**9.1.** Рассчитайте текущую стоимость облигации номинальной стоимостью 1000 ден. ед., сроком погашения пять лет и ежегодными выплатами по купонной ставке  $(p_1+p_2)\%$  при годовой процентной ставке  $(p_1+p_2+p_3)\%$ .

**9.2.** Курс облигации равен 105, купонный доход составляет  $(p_1+p_2)\%$ . Рассчитайте текущую доходность облигации.

**9.3.** Рассчитайте дюрацию потока платежей  
(100; 1), (200; 2), (300; 3), (400; 4)  
при процентной ставке  $(p_1+p_2)\%$ .

**9.4.** Облигация со сроком погашения 15 лет и купонной ставкой 10% (с ежегодной выплатой) имеет доходность к погашению  $p_3\%$ . Рассчитайте ее дюрацию.

 Литература: 1-3, 5-8.


## Задания по теме 10. Портфель облигаций

**10.1.** Постройте портфель из трехлетней и пятилетней облигаций, иммунизирующий четырехлетнюю облигацию номинальной стоимостью 3000 у.е. для процентной ставки  $(p_1+p_2)\%$ .

**10.2.** Рассчитайте доходность портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по  $(p_1+p_2)$  и  $(p_1+p_2+p_3)$  штук с доходностями 30% и 40% и курсами 102 и 110, соответственно.

**10.3.** Определите средний срок поступления дохода портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по  $10 \cdot p_1$  и  $10 \cdot (p_1+p_2)$  штук со средними сроками поступления 3,5 года и 5 лет и ценами 920 и 1100 руб., соответственно.

**10.4.** Рассчитайте дюрацию портфеля облигаций, состоящего из двух видов облигаций по 10 и 15 штук с дюрациями  $p_1$  и  $p_2$  лет и ценами 950 и 1000 руб., соответственно.

 Литература: 1-3, 5-8.

---

## Методические рекомендации по выполнению практических заданий

---

Контрольные задания по математике следует выполнять в общей тетради (48 л.) или на бумаге формата А4 (листы необходимо сшить). Работа должна содержать титульный лист принятого в МИЭП образца с указанием числовых значений резервированных параметров  $p_1$ ,  $p_2$  и  $p_3$ . При оформлении решений следует соблюдать нумерацию задач в соответствии с заданиями. Текст решений должен быть кратким и разборчивым. В неясных случаях необходимо консультироваться у преподавателя.

Срок сдачи работы определяется графиком учебного процесса, утверждаемым деканом факультета или руководителем филиала института.





Бакст Леонид Александрович

# **ОСНОВЫ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ**

Программа курса.  
Практические задания

Редактор *М.В. Егорова*  
Макет, верстка *Т.А. Поверина*  
Корректор *Г.В. Платова*

Лицензия ИД № 00871 от 25.01.00. Подписано в печать 17.09.2013  
Формат 60×84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 2,6. Изд. № 2565

Издательство МИЭП, типография МИЭП  
105082, Москва, Рубцовская наб., д. 3, стр. 1